Prüfungsaufgaben
Mündliches Abitur

Analysis

Teilbereich 1:

Ganzrationale Funktionen 1

Hier nur 2 Aufgaben als Demo

Datei Nr. 49111

Friedrich Buckel

März 2002

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Die in dieser Reihe von Dateien angebotenen Prüfungsaufgaben entstammen alle der Prüfungspraxis. Als Fachlehrer und Prüfungsvorsitzender habe ich über 30 Jahre hinweg Prüfungsaufgaben von Fachlehrern gesammelt und werte diese Sammlung nun aus.

Diese Aufgaben eignen sich auch vorzüglich der Vorbereitung der schriftlichen Prüfungen, denn in ihnen wird kompakt das Wichtigste besprochen.

Ich mache dabei selten Angaben, ob sie dem Grundkurs oder dem Leistungskurs zugeordnet werden sollen, denn es gibt einen großen Bereich, in dem sich die Themen überlappen. Außerdem hängt das Niveau einer Prüfung nicht nur vom Thema ab, sondern auch von der sich daran anschließenden Entwicklung der Prüfung, also den Zusatzfragen zur Methodik, zur Theorie, zu Anwendungen. Ich werde meistens noch eine oder mehrere mögliche Zusatzfragen anfügen.

Die angebotenen Lösungen sind nicht für alle Schüler gleichermaßen verwendbar, denn die Methodik ist natürlich auch davon abhängig, wie der Fachlehrer unterrichtet hat. Beispielsweise wenden nicht alle in der Vektorrechnung Determinantenverfahren an.

In den meisten Bundesländern ist eine zweigeteilte mündliche Prüfung von insgesamt 20 bis 30 Minuten Länge üblich. Im ersten Teil liegt dem Schüler eine Aufgabe vor, deren Text er im Vorbereitungszimmer bereits erhält. Er hat dann 10 bis 15 Minuten Zeit, die Lösung vorzutragen. Die zweite Hälfte der Prüfung geschieht dann in der Regel an einer unvorbereiteten, in der Prüfung gestellten Aufgabe.

Die hier angebotenen Aufgaben dienen der ersten Prüfungshälfte. Der Umfang von 10 bis 15 Minuten wird oft überschritten, denn es kommt auch darauf an, dass der Schüler flüssig vorträgt und den Lösungsweg kennt. Schwache Schüler kommen dann oft nicht weit und handeln dann nur Teile der Aufgabe ab.

Diese Sammlung an Prüfungsaufgaben wird kontinuierlich erweitert.

Ich verwende für alle quadratischen Gleichungen die allgemeine Lösungsformel, und nie die p-q-Formel. Sie lautet:

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

In den meisten Fällen kann man entsprechend die p-q-Formel anwenden. In einigen Fällen führt diese jedoch zu komplizierteren Rechnungen.

Aufgabe (Ganzrationale Funktion 1)

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = -x^2 + 3x + 4$.

a) Skizziere ihr Schaubild K.

b) Welche Gleichung hat die Tangente im Schnittpunkt C von K mit der y-Achse.

c) Diese Tangente, die Kurve K und die x-Achse begrenzen im 2. Feld eine Fläche. Durch welche Methode berechnet man ihren Inhalt? Führe die wichtigsten Schritte durch.

Lösung:

a) Die quadratische Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ hat als Schaubild eine nach unten geöffnete Parabel. Ihr Scheitel kann mit Hilfe der 1. Ableitung(sfunktion) berechnet werden:

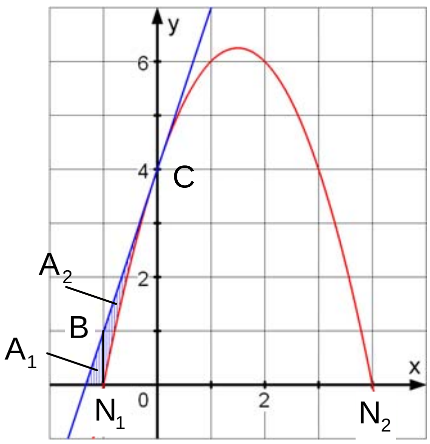
$$f'(x) = -2x + 3.$$

Aus der Bedingung $f'(x) = 0$ also $-2x + 3 = 0$ folgt $x_S = \frac{3}{2}$.
Die y-Koordinate erhält man durch Einsetzen in f(x):

$$y_S = f\left(\tfrac{3}{2}\right) = -\tfrac{9}{4} + 3 \cdot \tfrac{3}{2} + 4 = -\tfrac{9}{4} + \tfrac{18}{4} + \tfrac{16}{4} = \tfrac{25}{4} = 6{,}25 \quad \text{Scheitel: } S\left(\tfrac{3}{2} \middle| \tfrac{25}{4}\right)$$

Die Parabel schneidet die y-Achse in den Nullstellen:

$$-x^2 + 3x + 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{-2} = \frac{-3 \pm 5}{-2} = \begin{cases} -1 \\ 4 \end{cases}$$



b) Der Schnittpunkt von K mit der y-Achse ist $C(0|4)$.
Die Steigung der Tangente in C ist $m_{T,C} = f'(0) = 3$.
Die Tangentengleichung folgt dann direkt so:

T: $y = mx + n$ d.h. $y = 3x + 4$
denn C ist auch der Achsenabschnitt von T.

c) ***1. Methode:***

Die Fläche zwischen Tangente, x-Achse und Kurve K muss zerteilt werden. Zeichnet man in der Nullstelle $N_1(-1|0)$ eine Parallele zur y-Achse, dann entsteht ein Dreieck A_1 und eine Fläche A_2 zwischen Kurve und Tangente.

Für die Dreiecksfläche muss man die Grundseite berechnen, das ist der Abstand zwischen den Nullstellen von Kurve (-1) und Tangente $\left(-\frac{4}{3}\right)$, $g = -1 - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}$ und die Höhe, also dem y-Wert des Punktes B auf der Tangente:
$y_B = 3 \cdot (-1) + 4 = 1$: ergibt $A_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$.

Die Fläche A_2 ist eine Fläche zwischen zwei Kurven:

$$A_2 = \int_{-1}^{0} \left[(3x+4)-\left(-x^2+3x+4\right)\right] dx = \int_{-1}^{0} x^2\, dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0} = 0-\left[-\tfrac{1}{3}\right] = \tfrac{1}{3}$$

Gesuchte Fläche daher: $A = A_1 + A_2 = \frac{1}{6}+\frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

2. Methode:

Man kann die gesuchte Fläche auch so berechnen, dass man vom großen Dreieck, das die Tangente T mit den Koordinatenachsen bildet die Fläche subtrahiert, die von der Parabel und den beiden Achsen begrenzt wird.

Dreiecksfläche: $A_\Delta = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot 4 = \frac{8}{3}$

Parabelfläche: $A_P = \int_{-1}^{0} \left(-x^2+3x+4\right) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x\right]_{-1}^{0} =$

$A_P = 0-\left[\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-4\right] = -\frac{2}{6}-\frac{9}{6}+\frac{24}{6} = \frac{13}{6}$

Gesuchte Fläche: $A = A_\Delta - A_P = \frac{8}{3}-\frac{13}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Zusatzfragen:

(1) *Warum wurde der Parabelscheitel mit $f'(x)=0$ berechnet?*

Die Funktionswerte der 1. Ableitungsfunktion f' sind Tangentensteigungen. $f'(x)=0$ bedeutet daher die Tangentensteigung 0, also eine horizontale Tangente. Dies ist nur beim Scheitel der Fall.

Gibt es bei anderen Kurven auch solche Anwendungen?

Mit $f'(x)=0$ kann man alle Punkte bestimmen, deren Tangentensteigung 0 ist, also Hochpunkte, Tiefpunkte und Terrassenpunkte.

Es gibt eine weitere Anwendung der Funktion f'.

Dies ist die Monotonieuntersuchung. Wenn in einem Intervall $[\,a\,;b\,]$ gilt $f'(x)>0$, dann wächst dort f streng monoton. Man braucht dies etwa zur Bestimmung von Umkehrfunktionen.

(2) *Wie würde man die Steigung der Normalen in C berechnen?*

Da die Normale auf der Tangente senkrecht steht, verwendet man die Bedingung für orthogonale Geraden: $m_1 \cdot m_2 = -1$ und erhält

$m_N = -\dfrac{1}{m_T} = -\dfrac{1}{3}$ also Normalensteigung. (Der negative Kehrwert der Tangentensteigung).

Aufgabe (Ganzrationale Funktion 2)

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$.

a) Skizziere ihr Schaubild K. Berechne dazu die wichtigsten Punkte.

b) Welche Fläche schließt K mit der x-Achse ein?

Lösung:

Auf der Mathe-CD

Aufgabe (Ganzrationale Funktion 6)

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x$.

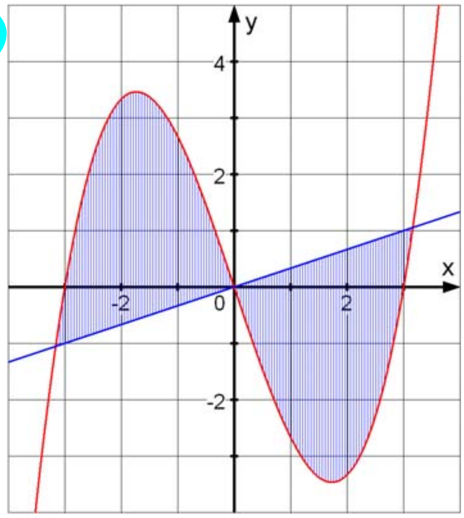
a) Skizziere das Schaubild K von f. Berechne dazu Nullstellen und Extrempunkte.

b) Die Normale im Ursprung begrenzt mit K eine zweigeteilte Fläche, Berechne ihren Inhalt.

Lösung:

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x$ mit $f'(x) = x^2 - 3$ und $f''(x) = 2x$

Das Schaubild K von f ist **punktsymmetrisch zum Ursprung**, da $f(-x) = -f(x)$ gilt (wegen der ungeraden Exponenten).



Nullstellen sind: $x\left(\frac{1}{3}x^2 - 3\right) = 0$

$x_1 = 0$ und $x_{2,3} = \pm 3$.

Extrempunkte: Aus $f'(x_E) = 0$ folgt

$x_E = \pm\sqrt{3}$ mit $f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$

und $f''\left(\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3} > 0$ Wir haben daher den Tiefpunkt $T\left(\sqrt{3} \mid -2\sqrt{3}\right)$ und wegen der Punktsymmetrie den Hochpunkt $H\left(-\sqrt{3} \mid 2\sqrt{3}\right)$.

b) Steigung der Tangente in O: $m_T = f'(0) = -3$

Steigung der Normalen in O: $m_N = -\frac{1}{m_N} = \frac{1}{3}$

Normale in O: $y = \frac{1}{3}x$

Schnitt von Kurve und Normale:

$\frac{1}{3}x^3 - 3x = \frac{1}{3}x \mid \cdot 3$ ergibt $x^3 - 10x = 0$ d. h. $x(x^2 - 10) = 0$

$x_{S,1} = 0$, $x_{S2,3} = \pm\sqrt{10}$ mit $y_{S2,3} = \mp\frac{1}{3}\sqrt{10}$.

Da Kurve und Fläche punktsymmetrisch zum Ursprung sind, rechnen wir so:

$$A = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{10}} \left[\tfrac{1}{3}x - \left(\tfrac{1}{3}x^3 - 3x\right)\right] dx = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{10}} \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{10}{3}x\right] dx = 2 \cdot \left[-\tfrac{1}{12}x^4 + \tfrac{5}{3}x^2\right]_0^{\sqrt{10}}$$

$$A = 2 \cdot \left(-\tfrac{1}{12} \cdot 100 + \tfrac{5}{3} \cdot 10\right) = 2 \cdot \left(-\tfrac{25}{3} + \tfrac{50}{3}\right) = 2 \cdot \tfrac{25}{3} = \tfrac{50}{3}.$$

Zusatzfragen:

(1) *Kann man eine Aussage darüber machen, wie viele gemeinsame Punkte eine Ursprungsgerade $y = mx$ mit der Kurve K hat?*

Wenn man mit der Tangente in O beginnt: $y = -3x$ und dreht diese gegen den Uhrzeigersinn, dann wird ihre Steigung immer größer und man erhält außer dem Ursprung noch zwei weitere Schnittpunkte. Dies gilt weiter für alle positiven Steigungen, die beliebig groß werden dürfen. Die Gerade wird auch dann immer noch die Kurve K schneiden, weil diese bekanntlich immer steiler wird. Die Ableitungsfunktion $f'(x) = x^2 - 3$ hat ja die Eigenschaft, dass ihre Werte für $x \to \infty$ selbst gegen Unendlich gehen. Daher wird jede Ursprungsgerade mit (großer) positiver Steigung zwei weitere Schnittpunkte erzeugen.

Dreht man die Tangente $y = -3x$ dagegen im Urzeigersinn, dann gibt es keine weiteren Schnittpunkte mehr, also für m< - 3.

Dies lässt sich auch mathematisch beweisen:

$\frac{1}{3}x^3 - 3x = mx \;\big|\cdot 3$ ergibt $x^3 - 9x - 3mx = 0$

Ausklammern von x liefert $x\left(x^2 - (9+3m)\right) = 0$. Man erkennt, dass x = 0 immer gemeinsamer Punkt ist, die weiteren berechnen sich aus $x^2 = 9 + 3m$. Hier gibt es nur dann Lösungen, wenn $9 + 3m \geq 0$ ist, also $3m \geq -9$ d.h. $m \geq -3$. Mit anderen Worten: Für m < -3 gibt es keine weiteren Schnittpunkte mehr.

(2) *Wir erweitern den Funktionsterm mit x zu einem Bruch:* $g(x) = \dfrac{\frac{1}{3}x^4 - 3x^2}{x}$

(3) *Sind die Funktionen f und g identisch? Wie sieht das Schaubild von g aus?*

Die Funktionen sind nicht mehr identisch. g hat im Nenner die Nullstelle x = 0, das heißt nur doch den Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, während f bei 0 eine Nullstelle hatte. An allen anderen Stellen stimmen die Funktionswerte überein, weil man dann x wieder herauskürzen kann.

Das Schaubild von g ist dieselbe Kurve wie das Schaubild von f bis auf die Stelle bei x = 0. Dort hat das Schaubild von g ein Loch.